

ESO

NOVA SÈRIE BÀSICA

MATEMÀTIQUES

2

●
cruïlla
●



5. Proporcionalitat

1 Magnituds i proporcionalitat directa

- Dues magnituds són **directament proporcionals** quan en multiplicar o dividir una quantitat de la primera per un nombre, la quantitat corresponent de la segona queda multiplicada o dividida, respectivament, per aquest mateix nombre.
- El quocient de dues quantitats corresponents de dues magnituds directament proporcionals és un nombre constant k , que s'anomena **raó de proporcionalitat**. Quan igualem dues raons d'una mateixa raó de proporcionalitat, obtenim una **proporció**.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

- En una proporció, el producte dels extrems és igual al producte dels mitjans.

$$a \cdot d = b \cdot c$$

158 En la taula següent es relacionen les quantitats de dues magnituds. Completa la taula i observa que es verifica la condició de magnituds directament proporcionals.

Nombre de cotxes amb 5 rodes	1	2	3	5	10	40
Nombre de rodes	5	10	15	25	50	200

Diagrama de multiplicacions:

- De 1 a 2: $\times 2$
- De 1 a 3: $\times 3$
- De 1 a 5: $\times 5$
- De 5 a 10: $\times 2$
- De 5 a 25: $\times 5$
- De 10 a 40: $\times 4$
- De 15 a 45: $\times 3$
- De 25 a 100: $\times 4$

Hem de multiplicar el primer parell de valors (1 i 5) per 2, 3, 5, 10 i 40, respectivament, per comprovar que obtenim les quantitats de les columnes restants.

159 Completa les taules següents que relacionen dues magnituds directament proporcionals.

a)

Nombre de cotxes amb 4 portes	1	2		8	16	
Nombre de portes	4	8	16			400

b)

Nombre d'autocars amb 50 viatgers	1			6	8	
Nombre de viatgers	50	150	200			1.000

c)

Quantitat d'oli (L)	1	3			20	
Pes de l'oli (kg)	0,9		4,5	9		180

160 Completa la taula següent, les magnituds de la qual es relacionen mitjançant proporcionalitat directa, i calcula la raó de proporcionalitat dividint el valor de la primera magnitud entre el valor de la segona.

Nombre de pintors	1	2	5	6	20	12
Superfície pintada en un dia (m²)	50	100	250	300	1.000	600

Per obtenir la raó de proporcionalitat dividim dues quantitats corresponents qualssevol.

$$\text{Raó de proporcionalitat: } \frac{1}{50} = \frac{2}{100} = \frac{5}{250} = \dots = \boxed{0,02}$$

161 Quines de les parelles de valors següents formen proporció?

Exemple $\frac{1}{3}$ i $\frac{5}{15} \Rightarrow$ Comprovem si els productes encreuats dels seus termes són iguals.

En aquest cas sí, ja que es dóna que: $1 \cdot 15 = 3 \cdot 5 \Rightarrow 15 = 15$.

a) $\frac{3}{5}$ i $\frac{4}{6}$

b) $\frac{12}{9}$ i $\frac{4}{3}$

c) $\frac{25}{7}$ i $\frac{75}{21}$

162 Forma quatre proporcions amb els parells de valors següents.

(2, 3); (1, 2); (5, 7); (4, 6); (4, 1); (16, 4); (30, 42); (17, 34)

163 El preu de 3 litres de llet és de 2,40 euros. Calcula la raó de proporcionalitat directa entre la quantitat de llet comprada i el preu, i digues quant costarien 4 litres de llet.

2 Usa les proporcions directes

- Per calcular el **terme desconegut**, x , de la proporció $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ es divideix el producte encreuat dels seus termes els factors dels quals es coneixen, $b \cdot c$, per l'altre terme de la proporció a :

$$x = \frac{b \cdot c}{a}$$

164 Calcula el valor de x perquè els parells de valors següents formin proporció directa.

Exemple $\frac{3}{5} = \frac{6}{x} \Rightarrow 3 \cdot x = 5 \cdot 6 \Rightarrow x = \frac{30}{3} = 10$

a) $\frac{3}{7}$ i $\frac{x}{14}$

b) $\frac{35}{x}$ i $\frac{7}{5}$

c) $\frac{x}{14}$ i $\frac{11}{7}$

d) $\frac{13}{x}$ i $\frac{39}{15}$

165 Tres brics de suc costen 2,70 euros. Quant costen 5 brics del mateix suc?

Escrivim en una taula els valors donats de les magnituds, nombre de brics i preu de la compra, que són directament proporcionals. Després, apliquem la proporcionalitat directa per conèixer el valor de x .

Nombre de brics	3	5
Preu (€)	2,7	x

$$\frac{3}{2,7} = \frac{5}{x} \Rightarrow 3 \cdot x = 5 \cdot 2,7 \Rightarrow x = \frac{13,5}{3} = 4,50 \text{ €}$$

166 Quatre retoladors costen 3,20 euros. Quant valen 9 retoladors del mateix tipus?

- 167** Deu grams de tòfones costen 2 euros. Quant costen 150 grams del mateix producte? I 2 grams? I un quilo?

Passem les dades a una taula i la completem posant-hi x, y, z, que és allò que no coneixem.

Pes de les tòfones (g)	10	150	2	1.000
Preu (€)	2	x	y	z

Apliquem la proporcionalitat directa per calcular x, y, z.

$$\frac{10}{2} = \frac{150}{x} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 150}{10} = 30 \text{ €}$$

150 grams costen **30 euros.**

$$\frac{10}{2} = \frac{2}{y} \Rightarrow y = \frac{2 \cdot 2}{10} = 0,40 \text{ €}$$

2 grams costen **0,40 euros.**

$$\frac{10}{2} = \frac{1.000}{z} \Rightarrow z = \frac{2 \cdot 1.000}{10} = 200 \text{ €}$$

1 quilo (1.000 grams) costa **200 euros.**

- 168** Sis litres de llet pesen 5,7 quilograms. Quant pesen 10 litres, 1 litre i 16 litres de llet? Quants litres hi ha en un recipient que conté 17,1 quilos de llet?

- 169** Un ciclista pedala amb velocitat constant i en 1,5 hores ha recorregut 48 quilòmetres. Si continua a la mateixa velocitat, quants quilòmetres recorre en 4 hores? Quant temps tarda a recórrer 80 quilòmetres? Quants quilòmetres recorre en una hora?

- 170** Un meló de 3,5 quilograms de pes ha costat 2,80 euros. Quant costa cada quilogram de meló? Quant costa un meló de dos quilograms?

5 PROPORCIONALITAT

171 Una aixeta deixa anar en un minut 5 litres d'aigua. Quant temps tardarem a omplir un dipòsit de 60 litres amb aquesta aixeta?

Per saber quant tarda l'aixeta a omplir el dipòsit de 60 litres, calculem el temps que tarda a deixar anar un litre d'aigua. Per fer-ho, hi apliquem la proporcionalitat directa:

$$\frac{\text{Temps}}{\text{Litres}} = \frac{1 \text{ min}}{5 \text{ L}} = \frac{x \text{ min}}{1 \text{ L}} = 0,20 \text{ min/L}$$

Quan ja sabem el temps que tarda a deixar anar un litre, només l'haurem de multiplicar pels 60 litres.

$$\text{Temps} = 0,20 \text{ min/L} \cdot 60 \text{ L} = \boxed{12 \text{ min}}$$

172 Una bomba d'aigua omple en 8 minuts un dipòsit de 200 litres que abasteix un habitatge.

a) Quants litres per minut deixa anar?

b) I en una hora?

c) Quant temps ha de funcionar la bomba per omplir d'aigua una banyera de 75 litres?

173 Una capsa de galetes de 864 grams conté 4 paquets de 24 galetes cada un.

a) Quant pesen 36 galetes?

b) Quantes galetes conté el paquet de 270 grams?

174 L'Ester ha pagat 3,30 euros per 55 fotocòpies. Quant pagarà per 35 fotocòpies? I per 90?

3 Descomptes o recàrrecs? Percentatges

- Un **percentatge** és equivalent a una fracció de denominador 100, i també al nombre decimal corresponent. Exemple: $35\% = \frac{35}{100} = 0,35$
- Per **calcular el percentatge** d'una quantitat, es multiplica la quantitat per la fracció o pel nombre decimal equivalent al percentatge. Exemple:

$$35\% \text{ de } 460 = 460 \cdot \frac{35}{100} = 460 \cdot 0,35 = 161$$

175 Expressa en forma de fracció irreductible i de nombre decimal els percentatges següents.

Exemple $4\% \Rightarrow \frac{4}{100} = \frac{1}{25} = 0,04$

a) $30\% =$

b) $55\% =$

c) $3\% =$

d) $12,5\% =$

e) $90\% =$

f) $68\% =$

176 Troba el percentatge equivalent a cada una d'aquestes fraccions.

a) $\frac{7}{20} =$

b) $\frac{14}{25} =$

c) $\frac{4}{5} =$

d) $\frac{5}{8} =$

e) $\frac{8}{25} =$

f) $\frac{170}{200} =$

177 Calcula mentalment els percentatges següents.

a) $10\% \text{ de } 400$

b) $30\% \text{ de } 1.000$

c) $25\% \text{ de } 200$

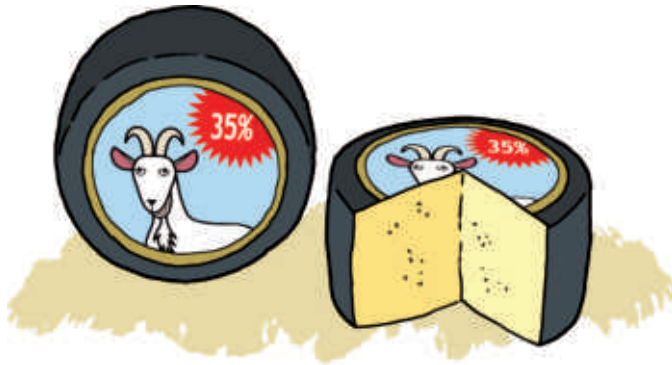
d) $5\% \text{ de } 300$

e) $20\% \text{ de } 10$

f) $3\% \text{ de } 10$

5 PROPORCIONALITAT

- 178** A l'etiqueta d'un formatge d'1,48 quilograms de pes hi diu que el contingut gras és del 35%. Quants grams de greix conté el formatge?



- 179** Un disc costa 24 euros, però a la botiga fan una rebuixa del 15%. Si tens 20 euros, quina quantitat de diners et fa falta per poder comprar-lo?

Valor de la rebuixa: $15\% \text{ de } 24 = 24 \cdot 0,15 = 3,60 \text{ €}$

Preu real: $24 - 3,60 = 20,40 \text{ €}$

Quantitat que et falta: $20,40 - 20 = 0,40 \text{ €}$

- 180** Un jersei costa 32 euros, i uns pantalons, un 40% més que el jersei. Quant valen les dues peces de roba juntes?

- 181** El quilo de lluç costava al gener 18 euros, i fins al mes de juny ha experimentat una pujada del 10%. Quin n'és el preu al juny?

- 182** El quilo de filet costava al gener 21 euros, i fins al mes de març ha experimentat una pujada del 5%. Quin n'és el preu al març? Si durant els tres mesos següents augmenta el mateix percentatge, quin preu té al mes de juny?

183 *En dos anys, un cotxe que es va comprar nou ha perdut el 32% del valor. Si actualment val 12.480 euros, quant va costar nou?*

Si el cotxe nou val un 100%, el valor actual del cotxe en percentatge és: $100\% - 32\% = 68\%$

Plantegem una proporció:

$$\frac{68}{12.480} = \frac{100}{x} \Rightarrow 68 \cdot x = 12.480 \cdot 100 \Rightarrow x = \frac{12.480 \cdot 100}{68} = \boxed{18.353 \text{ €}}$$

184 La Lluïsa ha comprat una bicicleta rebaixada un 18% per 123 euros. Quant costava sense rebaixar?

185 En Jaume ha resolt 21 exercicis de Matemàtiques, quantitat que correspon a un 70% del total de la tasca d'aquesta assignatura. Quants exercicis componen la tasca?

186 El 45% d'un nombre és 2.457. Quin és aquest nombre?

187 L'Andrea gasta 21 euros dels seus estalvis en activitats d'oci; 27 euros, en activitats culturals, i els 12 euros restants, en activitats esportives. Quin percentatge dedica a cada tipus d'activitat?

4 Proporcionalitat inversa

- Dues magnituds són **inversament proporcionals** quan en multiplicar o dividir una quantitat de la primera per un nombre, la quantitat corresponent de la segona queda dividida o multiplicada, respectivament, per aquest mateix nombre.
- El producte de dues quantitats corresponents a dues magnituds inversament proporcionals és un nombre k , constant, que s'anomena **constant de proporcionalitat inversa**:

$$a \cdot b = k$$

188 Completa aquesta taula, que mostra quantitats corresponents a dues magnituds inversament proporcionals.

		× 2		× 4		
Preu d'un llibre (€)	12	24	48	4	16	8
Nombre d'exemplars amb 48 €	4	2	1	12	3	6
		: 2		: 4		

Observa que, si augmenta el preu, disminueix el nombre d'exemplars que podem comprar.

El producte dels valors d'una mateixa columna és constant:

$$k = 12 \cdot 4 = 24 \cdot 2 = \dots = 48$$

189 Completa les taules següents, que relacionen dues magnituds inversament proporcionals.

a)

Nombre de pintors d'un equip	2			6	8	
Temps que s'ha tardat a pintar la mateixa casa (h)	48	24	8			32

b)

Cabal d'una aixeta (L/min)	5	2	10		20	
Temps que es tarda a omplir el mateix dipòsit (min)		180		60		20

c)

Velocitat d'un cotxe (km/h)	50	80	90		110	
Temps que tarda a recórrer 500 km (h)		6,2		5		4,2

5 Usa les proporcions inverses

Per calcular el **terme desconegut**, x , d'una proporció inversa $a \cdot b = c \cdot x$, se substitueixen els termes que es coneixen i s'aïlla el valor de la incògnita.

$$x = \frac{a \cdot b}{c}$$

190 Troba el terme desconegut en aquestes taules que mostren quantitats corresponents a magnituds inversament proporcionals.

Exemple

9	3
5	x

$$9 \cdot 5 = 3 \cdot x \Rightarrow x = \frac{9 \cdot 5}{3} = 15$$

a)

8	4
5	x

b)

10	5
6	x

c)

8	4
3	x

191 En una excursió per la muntanya, 5 amics tenen aigua per a 72 hores. Si es troben amb 3 excursionistes sense aigua i comparteixen la seva, per a quant temps tindran aigua?

Passem a una taula les dades de l'enunciat.

Nombre d'excursionistes	5	8
Nombre d'hores amb reserva d'aigua	72	x

A mesura que augmenti el nombre de persones per beure l'aigua que tenen, menys temps els durarà. Per tant, es tracta d'un cas de proporcionalitat inversa.

$$5 \cdot 72 = 8 \cdot x \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 72}{8} = 45 \text{ h}$$

5 PROPORCIONALITAT

- 192** Cada pàgina d'un llibre de 150 pàgines té 36 línies. Si es fa una altra edició del mateix llibre amb 30 línies per pàgina, quantes pàgines tindrà llavors el llibre?
- 193** El professor d'Educació Plàstica i Visual ha organitzat la visita a un museu. L'autocar costa 390 euros. Si hi van 55 alumnes, quants diners li costarà a cada un? I si només hi van 30 alumnes?
- 194** A la masia de la Lídia hi ha un dipòsit de 250 litres d'aigua que es renova setmanalment. Aquesta setmana hi havia 5 persones a la casa i els corresponien 50 litres a cada un. Quants litres correspondran a cada persona quan en siguin 7?
- 195** Durant la temporada de recollida de la poma a Lleida la família del Víctor n'ha recollit 3.000 quilograms. Les emmagatzemen en caixes on caben 20 quilos a cada una. Quantes caixes necessiten per posar-hi tota la collita?

► COMPROVA EL QUE HAS APRÈS

5. Proporcionalitat

1 Calcula el valor de x per tal que els parells de valors següents formin proporció directa.

a) $\frac{15}{21}$ i $\frac{x}{7}$

b) $\frac{x}{20}$ i $\frac{13}{5}$

2 Una màquina fabrica 450 cargols en 90 minuts.

a) Quants cargols fabrica en un minut?

b) I en una jornada de 8 hores?

3 Troba el percentatge equivalent a cada una d'aquestes fraccions.

a) $\frac{3}{25}$

b) $\frac{52}{80}$

4 En un centre on es prepara per fer oposicions hi ha matriculats 275 nois i noies, que suposa un 44% de tot l'alumnat. Quantes persones té el centre?

5 Una obra la fan 18 operaris en 15 dies. Quants operaris cal contractar per fer la feina en 9 dies?